Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1-3i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 64 = 0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 4x+1$ și punctul $A(2,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Arătați că $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = 3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x) = B\left(x^2 + x - 2\right)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = -1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) + 2x\right)dx = e - 1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = e - 3$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2 - 19\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(2+3i)+(1-3i)=$	**3p**
	$=3$, care este număr real	**2p**
2.	$g(1)=3$	**2p**
	$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$	**3p**
3.	$4^x=4^3$	**2p**
	$x=3$	**3p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=4x-8$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=-\cos(\pi-x+x)=$	**3p**
	$=-\cos\pi=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-1-0-0=0$	**3p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\x&0&x\\0&2x&0\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&x&0\\2x&0&2x\\0&x&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=3B(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$B(x)B(x)B(x)=\begin{pmatrix}0&2x^3&0\\2x^3&0&2x^3\\0&2x^3&0\end{pmatrix}$ și $B(x^2+x-2)=\begin{pmatrix}0&x^2+x-2&0\\x^2+x-2&0&x^2+x-2\\0&x^2+x-2&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$2x^3=x^2+x-2,\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-2\cdot0^2+2\cdot0+m=$	**3p**
	$=0-0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{x_1x_2x_3}=\frac{2\cdot 2}{1}=4$	**2p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $x_1+x_2+x_3=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=-2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)^x=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+x+1}}=e^{-2}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+2x)dx=\int_0^1 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=e-3\Rightarrow c=-2$, deci $F(x)=e^x-x^2-2$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1(e^x-2x)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-4xe^x+4x^2)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}-4(x-1)e^x+4\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=\frac{\pi(3e^2-19)}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3 = 6$ și $a_4 = 8$.
5p	**2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+3} = x+1$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(0,3)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 8$ şi $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A = -2$.
5p	**b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(B(x) + I_2\right) = 8$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot B(x) = B(x)\cdot A$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 7x - 7y + 56$.
5p	**a)** Arătați că $(-7) * 7 = 7$.
5p	**b)** Arătați că $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Calculați $1 * 2 * 3 * \cdots * 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \ln x + x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = e$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{3}{2}$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2 f(x)dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_4 - a_3 = 8 - 6 =$ $= 2$	**3p** **2p**
2.	Valoarea minimă a funcției este $-\frac{\Delta}{4a} =$ $= -\frac{36}{4} = -9$	**2p** **3p**
3.	$x^2 + 3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 3 = 2x + 1$ $x = 1$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} =$ $= 21$	**3p** **2p**
5.	$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{0-2}$ $y = -x + 3$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} =$ $= 8$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 =$ $= 4 - 6 = -2$	**3p** **2p**
b)	$B(x) + I_2 = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B(x) + I_2\right) = 7x + 1$ $7x + 1 = 8 \Leftrightarrow x = 1$	**3p** **2p**
c)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix}$ $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x+6 & 14 \\ 3x+12 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+6 & 2x+8 \\ 21 & 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$(-7) * 7 = (-7) \cdot 7 - 7 \cdot (-7) - 7 \cdot 7 + 56 =$ $= -49 + 49 - 49 + 56 = 7$	**3p** **2p**
b)	$x * y = xy - 7x - 7y + 49 + 7 =$ $= x(y-7) - 7(y-7) + 7 = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

c)	$x*7=7$ și $7*y=7$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\dots*2015=(1*2*\dots*6)*7*(8*9*\dots*2015)=7*(8*9*\dots*2015)=7$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}+1$ și $f'(1)=e \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y=ex+1$	**3p**
c)	$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1 (x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-1+\ln 2=-\frac{1}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=\pi\cdot\frac{-1}{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{10}=5$.
5p	**2.** Calculați $f(-2)+f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-1}=3$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.
5p	**6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB=10$ și $AC=12$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=1$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\det(A-aI_2)\geq 1$, pentru orice număr real a.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+5$.
5p	**a)** Arătați că $f(-5)=0$.
5p	**b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+6X+5.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\frac{26}{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}=5$	**2p**
2.	$f(-2)=0$, $f(2)=0$	**2p**
	$f(-2)+f(2)=0$	**3p**
3.	$2x-1=9$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 multipli de 5, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$MO=4$	**2p**
	$ON=4\Rightarrow \Delta MON$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=$	**3p**
	$=60$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A-aI_2=\begin{pmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-aI_2)=\begin{vmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=$	**3p**
	$=a^2+1\geq 1$, pentru orice număr real a	**2p**
2.a)	$f(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2+(-5)+5=$	**3p**
	$=-125+125-5+5=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este $2X+10$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-5$	**3p**
	$\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{x_1x_2x_3}=\frac{(-5)^2-2\cdot 1}{-5}=-\frac{23}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=0$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru $x\in[0,1]$	**2p**
	$f(-1)=f(1)=0$ și $f(0)=1\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=\frac{3x^2}{3}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$	**3p**
	$=x^2+\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 x^2e^xdx=x^2e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+2e^x\Big\vert_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Calculați $f\left(f(3)\right)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+17\right)=\log_3 81$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ și $C(2,1)$. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $A(2)\cdot X=A(8)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculați $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ și $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2-3i)(2+3i)=4-9i^2=$ $=13$	**3p** **2p**
2.	$f(3)=5$ $f(f(3))=f(5)=9$	**2p** **3p**
3.	$x^2+17=81 \Leftrightarrow x^2=64$ $x_1=-8$ şi $x_2=8$, care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	Sunt 90 numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 18 numere naturale de două cifre, divizibile cu 5, deci sunt 18 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$m_{AB}=\frac{2-a}{2}$ și $m_{BC}=1$ $m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a=0$	**2p** **3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}=$ $=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $A(-1)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ $A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{vmatrix}=4-4a^2$ $4-4a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ şi $a_2=1$	**3p** **2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=-12\neq 0 \Rightarrow (A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}$ $X=(A(2))^{-1}\cdot A(8) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 16\\ 16 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$	**3p** **2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=2\cdot(-3)\cdot 3-6\cdot(-3)-6\cdot 3+21=$	**3p**
	$=-18+18-18+21=3$	**2p**
b)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}=\left(1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}\right)\circ 3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=$ $=3\circ\left(\sqrt{10}\circ\sqrt{11}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}\right)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=3e^x+2x$ și $f'(0)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$	**3p**
b)	$f(0)=3$, $f'(0)=3$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=3x+3$	**3p**
c)	$f''(x)=3e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(9-1)=4$	**2p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$	**3p**
	$=2e^2-e-e^x\Big\|_1^2=e^2$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a\|f(x)\|dx=\int_1^a\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\|_1^a=\frac{a^2-1}{2}+\ln a$	**3p**
	$\frac{a^2-1}{2}+\ln a=4+\ln a\Leftrightarrow a^2=9$ și cum $a>1$, obținem $a=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+2015$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=2$.

5p **4.** După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$ și $N(4,1)$. Determinați lungimea segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{4}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Arătați că $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3)=5$.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$	**3p**
	$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2015$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=2015$	**2p**
3.	$x+2=4$	**2p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=99$, unde p este prețul obiectului înainte de reducere	**3p**
	$p=110$ lei	**2p**
5.	$MN=\sqrt{(4-2)^2+(1-1)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 1-2\cdot 1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A+I_2)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det(A-I_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$	**3p**
	$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=4+(-2)=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1=$	**3p**
	$=-1-2+2+1=0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)\Leftrightarrow\frac{2}{-1}=a\cdot(-2)\Leftrightarrow a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\frac{1}{x}\right)'=$	**2p**
	$=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(3)=5\Rightarrow c=-10$, deci $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x-10$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int\limits_0^1 e^x\left(x^2+2\right)dx=e^x\left(x^2+2\right)\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1 2xe^xdx=3e-2-\left(2xe^x\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1 2e^xdx\right)=$	**3p**
	$=3e-2-2e+2e^x\Big\vert_0^1=3e-4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6**. Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f(x)dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^nf(x)dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16 \Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3 \Leftrightarrow (x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - 2i = 0$.
5p	**2.** Calculați $(g \circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 2015$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = 2x + 7$.
5p	**6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN = 12$, $MP = 3$ și $m(\sphericalangle M) = 30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a)) = 0$.
5p	**c)** Arătați că $A(a)A(b) = A(a+b) + abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0) = 2$.
5p	**b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 2$ este egal cu 0.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
5p	**c)** Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 5)\,dx = \dfrac{1}{3}$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^2 \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015} \dfrac{1}{f(x)}\,dx \leq \dfrac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$	**3p**
	$z^2-2i=2i-2i=0$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=2015$	**3p**
3.	$x^2-5x=3-3x \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=3$	**2p**
4.	$C_5^4=\dfrac{5!}{4!\cdot 1!}=$	**3p**
	$=5$	**2p**
5.	Panta dreptei d este egală cu 2	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=2x+4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{12\cdot 3\cdot\sin 30^\circ}{2}=\dfrac{6\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-0\cdot 0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&-a\\-a&1\end{vmatrix}=1-a^2$	**3p**
	$1-a^2=0 \Leftrightarrow a_1=-1$ și $a_2=1$	**2p**
c)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+ab&-b-a\\-a-b&ab+1\end{pmatrix}$, $A(a+b)=\begin{pmatrix}1&-a-b\\-a-b&1\end{pmatrix}$, $abI_2=\begin{pmatrix}ab&0\\0&ab\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1+ab&-a-b\\-a-b&1+ab\end{pmatrix}=A(a)A(b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-m\cdot 0+2=$	**3p**
	$=0-0+2=2$	**2p**
b)	Restul este $(3-m)X$	**3p**
	$3-m=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=m(x_1+x_2+x_3)-6=m\cdot 0-6=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=e^x-1$ și $f'(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$	**3p**
b)	$e^x\le 1\Leftrightarrow x\le 0$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(0)=0$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	Cum f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$, obținem $f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x\ge x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+2x-5)dx=\int_0^1(x^2-2x+5+2x-5)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(x^2-2x+5)\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\ln 5-\ln 5=0$	**2p**
c)	$f(x)=(x-1)^2+4\ge 4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_{2014}^{2015}\frac{1}{f(x)}dx\le\int_{2014}^{2015}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big\|_{2014}^{2015}=\frac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=4$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-2$.
5p	**b)** Arătați că $A+B=5C$.
5p	**c)** Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.
5p	**a)** Arătați că $5\circ(-4)=-4$.
5p	**b)** Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
5p	**c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.
5p	**b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2015$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, $n>1$, știind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$	**3p**
	$\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$	**2p**
2.	$f(a)=0 \Leftrightarrow a-2=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x+3=16$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=4$	**2p**
	$y_M=4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$	**2p**
c)	$AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$	**2p**
2.a)	$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot 5+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-20+20-16+12=-4$	**2p**

b)	$x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 =$	**2p**
	$= x(y+4) + 4(y+4) - 4 = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x \circ x = (x+4)^2 - 4$	**2p**
	$(x+4)^2 - 4 = x \Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = -3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(2x^3\right)' + \left(3x^2\right)' + 5' =$	**2p**
	$= 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x) - 2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x(x+1)}{3x^2+5} =$	**2p**
	$= 2$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ și $x_2 = 0$	**2p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1, 0]$	**1p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	**1p**
2.a)	$\int\limits_1^2 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = \int\limits_1^2 4x^3 dx = x^4 \Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 16 - 1 = 15$	**2p**
b)	$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^4 + x^3 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(1) = 2015 \Rightarrow c = 2013$, deci $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$	**3p**
c)	$\int\limits_1^n \dfrac{f(x)}{x^2} dx = \int\limits_1^n (4x+3) dx = 2x^2 \Big\vert_1^n + 3x \Big\vert_1^n = 2n^2 + 3n - 5$	**3p**
	$2n^2 + 3n - 5 = 9$ și cum n este număr natural, $n > 1$, obținem $n = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Varianta 8

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{32}-\sqrt{18}-\sqrt{2}=0$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-2x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{5-3x}=25$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4 şi 5.
5p	**5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(5,3)$ și $C(5,6)$. Arătați că $AB=BC$.
5p	**6.** Arătați că $\sin 30°+\sin 45°\cdot\cos 45°=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y$.
5p	**1.** Arătați că $2015\circ(-1)=-1$.
5p	**2.** Demonstrați că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
5p	**3.** Verificați dacă $e=0$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**4.** Arătați că $x\circ x=(x+1)^2-1$, pentru orice număr real x.
5p	**5.** Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=0$.
5p	**6.** Arătaţi că $x\circ(x+1)\geq x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Arătați că $\det(A(0))=-2$.
5p	**2.** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\det(A(a)-I_2)<0$.
5p	**4.** Arătați că $(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=(a^2+a-2)I_2$, pentru orice număr real a.
5p	**5.** Determinați inversa matricei $A(2)$.
5p	**6.** Determinaţi numerele naturale m pentru care $\det(A(m))\leq 1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **<u>Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$	**2p**
	$4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$	**3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=4-2x\Leftrightarrow 3x=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=1$ și $y=2$	**2p**
3.	$5^{5-3x}=5^2\Leftrightarrow 5-3x=2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 5 moduri, deci se pot forma $2\cdot 5=10$ numere	**3p**
5.	$AB=3$	**2p**
	$BC=3\Rightarrow AB=BC$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$2015\circ(-1)=2015\cdot(-1)+2015+(-1)=$	**3p**
	$=-2015+2015-1=-1$	**2p**
2.	$(x\circ y)\circ z=(xy+x+y)\circ z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$	**2p**
	$x\circ(y\circ z)=x\circ(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z=(x\circ y)\circ z$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
3.	$x\circ 0=x\cdot 0+x+0=x$	**2p**
	$0\circ x=0\cdot x+0+x=x=x\circ 0$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
4.	$x\circ x=x\cdot x+x+x=x^2+2x=$	**2p**
	$=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$, pentru orice număr real x	**3p**
5.	$x\circ x\circ x\circ x=(x+1)^4-1$	**2p**
	$(x+1)^4=1\Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**
6.	$x\circ(x+1)-x=x(x+1)+x+x+1-x=x^2+2x+1=$	**2p**
	$=(x+1)^2\geq 0$, deci $x\circ(x+1)\geq x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\cdot 1-1\cdot 2=$	**3p**
	$=0-2=-2$	**2p**
2.	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a & 2\\ 1 & a+1\end{vmatrix}=a^2+a-2$	**3p**
	$a^2+a-2=0\Leftrightarrow a_1=-2$ și $a_2=1$	**2p**
3.	$A(a)-I_2=\begin{pmatrix}a-1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(a)-I_2)=a^2-a-2$	**2p**
	$a^2-a-2<0\Leftrightarrow a\in(-1,2)$	**3p**
4.	$(2a+1)A(a)=\begin{pmatrix}2a^2+a & 4a+2\\ 2a+1 & 2a^2+3a+1\end{pmatrix}$	**1p**
	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+2 & 4a+2\\ 2a+1 & a^2+2a+3\end{pmatrix}$	**2p**
	$(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+a-2 & 0\\ 0 & a^2+a-2\end{pmatrix}=(a^2+a-2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(a^2+a-2)I_2$, pentru orice număr real a	**2p**
5.	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=4\neq 0$	**2p**
	$(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
6.	$\det(A(m))\leq 1\Leftrightarrow m^2+m-3\leq 0$	**2p**
	Cum m este număr natural obținem $m=0$ și $m=1$	**3p**