BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI VIZSGA, 2018. július 15.
Írásbeli vizsga MATEMATIKÁBÓL

FONTOS TUDNIVALÓK:

1) A feleletválasztós feladatok („A" rész) esetén egy vagy több válasz lehet helyes. A helyes válaszokat a vizsgalapon kell feltüntetni. Egy feladathoz tartozó pontszámot csak akkor lehet megkapni, ha az összes helyes válasz fel van tüntetve, és csak a helyes válaszok vannak feltüntetve.

2) A „B" rész feladatai esetén a vizsgalapon kérjük a megoldások részletes kidolgozását. Ezeket a javítókulcs alapján értékeljük.

„A" rész

1. (5 pont) Legyen $a = (1+\sqrt{2})^7 + (1-\sqrt{2})^7$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $a \notin \mathbb{R}$; $\boxed{\text{B}}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $\boxed{\text{C}}$ $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; $\boxed{\text{D}}$ $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\boxed{\text{E}}$ $a \in \mathbb{N}$.

2. (5 pont) Legyen A egy 4 elemű és B egy 5 elemű halmaz. Az A-t B-be képező függvények száma:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 4^5; $\boxed{\text{C}}$ 5^4; $\boxed{\text{D}}$ A_5^4; $\boxed{\text{E}}$ C_5^4.

3. (5 pont) Legyen m egy valós paraméter. Az $x^3 - 12x = m$ egyenlet valós gyökeinek száma:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1 ha $m < -16$; $\boxed{\text{C}}$ 1 ha $m > 16$; $\boxed{\text{D}}$ 3 ha $-16 < m < 16$; $\boxed{\text{E}}$ 3 bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén.

4. (5 pont) Az ABC háromszög területe 5 egység. Az A és B csúcs koordinátái $(2,1)$, illetve $(3,-2)$, a C pont pedig az $y = x + 3$ egyenletű egyenesen helyezkedik el. A C pont koordinátái:

$\boxed{\text{A}}$ $(-3/2, 3/2)$; $\boxed{\text{B}}$ $(3/4, -3/2)$; $\boxed{\text{C}}$ $(7/2, 13/2)$;
$\boxed{\text{D}}$ $(11/2, -1/2)$; $\boxed{\text{E}}$ $(2,5)$.

5. (5 pont) Az alább felsorolt halmazok közül melyek részhalmazai az

$$1 + \cos 3x = 2\cos 2x$$

egyenlet megoldáshalmazának?
$\boxed{\text{A}}$ $\left\{n\pi + \frac{\pi}{3} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\left\{n\pi + \frac{\pi}{6} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\left\{n\pi - \frac{\pi}{6} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$; $\boxed{\text{D}}$ $\{2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$;
$\boxed{\text{E}}$ $\left\{n\pi - \frac{\pi}{3} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. (5 pont) Adott az $a \neq 1$ szigorúan pozitív valós szám. A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\ln a} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ határérték értéke:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\ln a}{|\ln a|}$; $\boxed{\text{D}}$ $\ln a$; $\boxed{\text{E}}$ $2\ln a$.

„B" rész

1. Tekintjük az $\mathbb{R}[X]$ halmazon a polinomok szokásos összeadása és szorzása által meghatározott $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ gyűrűt és az

$$A = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 3\}$$

halmazt.

a) (8 pont) Igazold, hogy az A halmaz az $(\mathbb{R}[X], +)$ csoport egy részcsoportja!

b) (5 pont) Igazold, hogy A nem zárt részhalmaza az $\mathbb{R}[X]$ halmaznak a polinomok szorzására nézve!

c) (7 pont) Az A halmazban hány olyan polinom van, amely osztható $X^2 - 4$-gyel és az $X^2 - 4X + 3$-mal való osztási maradéka $X + 1$?

2. a) (7 pont) Legyen a és b két szigorúan pozitív valós szám. A $B(a, 0)$ és $D(0, b)$ pontok egy $ABCD$ négyzet szembefekvő csúcsai. Határozd meg az $ABCD$ négyzet másik két csúcsának koordinátáit!

b) (8 pont) Bizonyítsd be, hogy ha $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, akkor

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

3. Legyen $a > 0$. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^x}, & x \leq a \\ \sqrt{x}, & x > a \end{cases}$$

függvényt.

a) (10 pont) Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre f folytonos $\mathbb{R}$-en!

b) (8 pont) Határozd meg az f primitívjeit, azokra az a értékekre, amelyekre f-nek léteznek primitív függvényei!

c) (7 pont) Számítsd ki az $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$ integrált a függvényében!

MEGJEGYZÉS:

Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

Válaszok és megoldások

„A” rész

1. $\boxed{E}$; **2.** $\boxed{C}$; **3.** $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$; **4.** $\boxed{A}$, $\boxed{C}$; **5.**$\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$; **6.** $\boxed{D}$.

„B” rész

1. a) Az A halmaz felírható $A = \{f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ alakban. Az $f = 0$ polinom fokszáma $-\infty$, tehát $0 \in A$ és emiatt $A \neq \emptyset$. $\forall f, g \in A,\ \exists a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3)$: $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3,\ g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$, tehát $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 \in A$, vagyis $\forall f, g \in A,\ f + g \in A$. Ugyanakkor $\forall f \in A,\ \exists a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, 2, 3) :\ f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, tehát $-f = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + (-a_3)X^3 \in A$, vagyis $\forall f \in A,\ -f \in A$. Az előbbi három tulajdonság alapján A részcsoportja $(\mathbb{R}[X], +)$-nek.

1. b) Ha $f = X^3 \in A$, akkor $f \cdot f = X^6 \notin A$ mivel $f \cdot f$ fokszáma 6, tehát A nem zárt része $\mathbb{R}[X]$-nek.

1. c) 1. Megoldás. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $f = a + bX + cX^2 + dX^3$, akkor az $\mathbb{R}[X]$-beli polinomok maradékos osztásának tétele alapján létezik $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ úgy, hogy

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1). \quad (1)$$

Mivel $(X^2 - 4) \mid f$, létezik $q_2 \in \mathbb{R}[X]$ úgy, hogy

$$f = (X^2 - 4)q_2 = (X - 2)(X + 2)q_2. \quad (2)$$

Kiszámítjuk $f(1)$ és $f(3)$ értékét az (1) alapján:

$$a + b + c + d = 2, \quad (3)$$

$$a + 3b + 3^2c + 3^3d = 4. \quad (4)$$

Kiszámítjuk $f(2)$ és $f(-2)$ értékét a (2) alapján:

$$a + 2b + 2^2c + 2^3d = 0, \quad (5)$$

$$a + (-2)b + (-2)^2c + (-2)^3d = 0. \quad (6)$$

Az f pontosan akkor teljesíti a feladatban megfogalmazott tulajdonságokat, ha (a, b, c, d) megoldása a (3), (4), (5), (6) összefüggésekből alkotott (S) egyenletrendszernek. Ennek a rendszernek a determinánsa (Vandermonde típusú)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1 & 3^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 120 \neq 0,$$

tehát (S) összeférhető és határozott, vagyis pontosan egy f polinom teljesíti a kért feltételeket.

2. Megoldás. Az $(X^2 - 4) \mid f$ alapján létezik $q \in \mathbb{R}[X]$ úgy, hogy

$$f = (X^2 - 4)q \quad (1)$$

A q fokszáma legfeljebb 1, tehát létezik $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $q = aX + b$. Így (1) alapján

$$f = (X^2 - 4)(aX + b) \quad (2).$$

A maradékos osztás tétele alapján létezik $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ úgy, hogy

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1), \quad (3)$$

tehát $f(1)=2$ és $f(3)=4$. (2) alapján

$$2=f(1)=-3(a+b) \;\Leftrightarrow\; a+b=-\frac{2}{3}, \quad (4)$$

$$4=f(3)=5(3a+b) \;\Leftrightarrow\; 3a+b=\frac{4}{5}. \quad (5)$$

A (4) és (5) egyenletekből alkotott rendszer megoldása egyértelmű $a=\frac{11}{15}$, $b=-\frac{7}{5}$, tehát pontosan egy f polinom teljesíti a kért feltételeket.

Megjegyzés. Ebben a megoldásban sem szükséges az f konkrét meghatározása, de az f alakja is felírható:

$$f=(X^2-4)\left(\frac{11}{15}X-\frac{7}{5}\right)=\frac{11}{15}X^3-\frac{7}{5}X^2-\frac{44}{15}X+\frac{28}{5}$$

(innen látható az első megoldásban szereplő S rendszer megoldása is).

2. a) BD a négyzet egy átlója. BD iránytényezője $k=-\frac{b}{a}$ és a BD egyenes egyenlete $bx+ay-ab=0$. A négyzet oldalának hossza $BD/\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}$. Az AC átló áthalad az $[BD]$ szakasz E felezőpontján és merőleges BD-re. E koordinátái $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$, az AC egyenes iránytényezője $\frac{a}{b}$. Az AC egyenes egyenlete $y-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)$. C rajta van az AC egyenesen, tehát ha $C(x_C,y_C)$, akkor a $CD^2=BD^2/2$, alapján

$$\begin{cases} y_C-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}\left(x_C-\frac{a}{2}\right), \\ 2\left[x_C^2+\left(y_C-b\right)^2\right]=a^2+b^2. \end{cases}$$

Az előbbi rendszerből a $4x_C^2-4ax_C+a^2-b^2=0$ egyenlethez jutunk, amelynek a megoldásai $x_C=\frac{1}{2}(a\pm b)$. A $+$ előjellel kapjuk a $C\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ pontot és a $-$ előjellel az $A\left(\frac{a-b}{2},\frac{b-a}{2}\right)$ pontot, vagy fordítva.

2. b) Jegyen BO a bal oldalon levő kifejezés és JO a jobb oldalon levő kifejezés. Írhatjuk, hogy

$$\mathrm{BO}=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma).$$

A feltételek alapján $\beta-\gamma=\pi-\alpha$, tehát

$$\mathrm{BO}=\sin^2\alpha+\sin(\beta+\gamma)\sin(\pi-\alpha)=\sin^2\alpha+\sin(\beta+\gamma)\sin\alpha=\sin\alpha\left[\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)\right].$$

Ismét használva az $\alpha=\pi-(\beta-\gamma)$ feltételt

$$\mathrm{BO}=\sin\alpha\left[\sin(\pi-(\beta-\gamma))+\sin(\beta+\gamma)\right]=\sin\alpha\left[\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)\right],$$

vagyis

$$\mathrm{BO}=\sin\alpha\left[2\sin\beta\cos\gamma\right]=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\mathrm{JO}.$$

3. a) A vizsgált függvény folytonos az $x\neq a$ pontokban (az $a>0$ feltétel biztosítja, hogy $\sqrt{x}$ értelmezett $x>a$ esetén és így f exponenciális vagy gyök függvény x egy környezetében). Az $x=a$ pontban

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\frac{1}{2^a} \text{ és}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\sqrt{a},$$

tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy f folytonos legyen az, hogy $\frac{1}{2^a}=\sqrt{a}$.

Az előbbi egyenlőség jobb oldala szigorúan növekvő, a bal oldal szigorúan csökkenő (mint a függvénye), tehát az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Másrészt $a = \frac{1}{2}$ egy megoldás, tehát f pontosan akkor folytonos, ha $a = \frac{1}{2}$.

3. b) Ha f-nek van primitívje, akkor f Darboux tulajdonságú, tehát nem lehet elsőfajú szakadási pontja. Ha $a \neq \frac{1}{2}$, akkor viszont f-nek elsőfajú szakadási pontja van, tehát f pontosan akkor primitiválható, ha $a = \frac{1}{2}$ (mert $a = \frac{1}{2}$ esetén folytonos)

Ha $a = \frac{1}{2}$, akkor az f primitívjeinek alakja

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c_1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ezek folytonosak kellene legyenek, tehát

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} + c_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + c_2.$$

Tehát a primitívek alakja

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c, & x \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\ln 2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + c, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ezek a Lagrange-tétel következménye alapján deriválhatók is és $F'(x) = f(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

3. c) Ha $0 < a < 1$, akkor

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_a^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^a \frac{1}{2^x}\,dx + \int\limits_a^1 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2^x \ln 2}\Big|_0^a + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Big|_a^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^a \ln 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Ha $1 \leq a$, akkor $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2^x}\,dx = -\frac{1}{2^x \ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\ln 2}$.